

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА

ТРЕХ- И ЧЕТЫРЕХУРОВНЕВЫЕ СПИРАЛЬНЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЛАСТИНКИ

Котляр В.В., Ковалев А.А.

Институт систем обработки изображений РАН

Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева

Аналитически и численно показано, что вблизи оптической оси или в центре картины дифракции Фраунгофера в области, примерно равной диску Эйри, при дифракции плоской волны на трех- и четырехуровневых спиральных фазовых пластинках (СФП) с треугольной и квадратной апертурами формируется оптический вихрь с топологическим зарядом 1. Составные СФП, набранные из 6 или 4 таких трех- и четырехуровневых СФП, могут формировать оптические вихри с топологическим зарядом 2 и 4.

1 Введение

В последнее время возрос интерес исследователей к оптическим вихрям (optical vortices). Оптический вихрь (ОВ) – это когерентное световое поле, в поперечном сечении которого имеется изолированный ноль (или несколько нулей) интенсивности, а фаза при обходе такой нулевой точки приобретает набег, кратный 2π . Появилось много работ, исследующих распространение оптических вихрей – солитонов в нелинейных средах [1-4]. В [1] численно исследуются ОВ – солитоны, формирующиеся в нелинейной среде лазерного резонатора. Сингулярные пучки – эллиптиконы, которые описываются функциями Айнса-Гаусса и которые могут быть сформированы в нелокальной нелинейной среде, исследуются в [2]. В [3] экспериментально изучались ОВ с радиальной и азимутальной поляризациями, которые формируются в самофокусирующей среде с керровской нелинейностью. Оптические вихри могут быть сформированы также сложением нескольких волн в нелинейной среде, внутри которой синтезирован спиральный фотонный кристалл [4]. В [5] описывается золотое зеркало – голограмма, которое изготавливалось по технологии лазерного травления с помощью фемтосекундного сапфирового лазера с длиной волны 800 нм и которое использовалось для формирования ОВ из фемтосекундных мощных лазерных импульсов. В [6, 7] с помощью лазерных интерферометров исследовались фазовое распределение [6] и угловой орбитальный момент [7] ОВ, порожденных пучком Лагерра – Гаусса (ЛГ). В [8, 9] описываются новые семейства лазерных пучков, обладающих цилиндрической симметрией и несущих угловой орбитальный момент: круговые частичные пучки [8] и гипергеометрические лазерные пучки [9]. Эти лазерные пучки также являются примерами ОВ. В [10] численно показано, что ОВ, сформированный лазерной модой ЛГ, распространяясь в турбулентной атмосфере (турбулентность выбиралась Колмогоровского типа), сохраняет свой топологический заряд на большом расстоянии: на расстоянии 4 км, если топологический заряд $n = 1$ и на 2 км, если $n = 5$. В [11] описана субапертурная адаптивная оптическая система, которая предназначена для

наблюдения объектов через турбулентную атмосферу. Каждая субапертура используется для локальной компенсации искажений волнового фронта. Если вместо приемной субапертуры использовать адаптивное зеркало, вносящее локальную фазовую задержку, то можно с помощью небольшого числа субапертурных адаптивных зеркал сформировать ОВ, и передавать с его помощью информацию через турбулентную атмосферу. В [12] исследуются световые поля, сформированные несколькими, разнесенными в пространстве ОВ, каждый из которых создается модой ЛГ. В [13, 14] рассматривалась многоуровневая спиральная фазовая пластинка (СФП), с помощью которой также можно формировать ОВ. Многоуровневая СФП в [14] имела апертуру в виде правильного многоугольника, и было показано, что при любом числе сторон многоугольника вблизи оптической оси будет формироваться ОВ с фазовой сингулярностью (или дислокацией волнового фронта).

В этой работе, продолжая [14], мы на конкретных примерах покажем, как с помощью всего трех- или четырехуровневых СФП, ограниченных правильными треугольником или четырехугольником, можно сформировать ОВ с топологическим зарядом $n = 1, 2, 4$. Кроме того, мы покажем, что ОВ с $n = 1$ можно сформировать также с помощью трех круглых субапертур, вносящих фазовые задержки 0 , $2\pi/3$ и $4\pi/3$. С помощью таких простых оптических элементов, совмещенных с динамическими адаптивными устройствами [11], можно передавать информацию на большое расстояние, даже в присутствии атмосферной турбулентности [10].

2. Малоуровневые СФП

2.1 Треугольная СФП с тремя уровнями фазы

На рис.1а схематично показана многоуровневая СФП с апертурой в виде правильного многоугольника. В [14] приведена формула (уравнение (2) в [14]), которая выражает комплексную амплитуду в плоскости Фурье-спектра как сумму $3P$ слагаемых, каждое из которых связано с одной из сторон равных треугольников, на которые разделена вся апертура многоуровневой СФП, ограниченной правильным P -угольником.

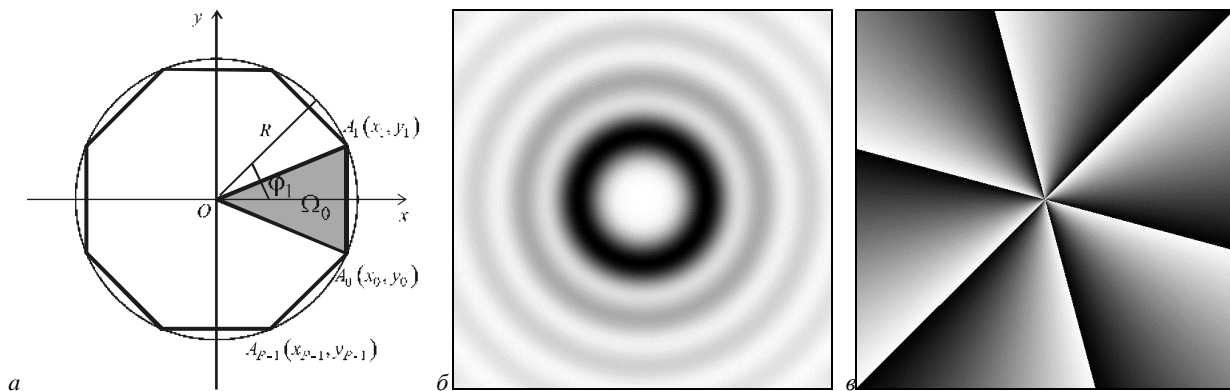


Рис.1 Схема многоуровневой СФП с полиномиальной апертурой (а), интенсивность (б) и фаза (в) картины дифракции Фраунгофера для непрерывной СФП с топологическим зарядом $n=6$

Приведем здесь эту формулу для удобства:

$$E(\rho, \theta) = \frac{if \cos \frac{\pi}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \exp(i\Psi_p)}{2\pi k \rho^2 \sin(\varphi_p - \theta) \cos \alpha_p \cos \alpha_{p+1}} \times \left[2 \sin \frac{\pi}{P} \sin(\varphi_p - \theta) + \cos \alpha_{p+1} \exp\left(-i \frac{kR\rho}{f} \cos \alpha_p\right) - \cos \alpha_p \exp\left(-i \frac{kR\rho}{f} \cos \alpha_{p+1}\right) \right], \quad (1)$$

где $\Psi_p = n\varphi_p$, $\varphi_p = (2\pi/P)p$, $p = \overline{0, P-1}$, $\alpha_p = \varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta$, $P \geq 3$.

На рисунках 1б и 1в для примера показаны интенсивность и фаза картины дифракции Фраунгофера плоской волны на непрерывной СФП (когда P в (1) стремится к бесконечности) с топологическим зарядом $n=6$. Далее мы будем рассматривать СФП с малым числом уровней фазы и ограниченные диафрагмами в виде многоугольников. На рис. 2а показан вид СФП, ограниченной правильным треугольником, площадь которого раз-

делена на три равных треугольника с постоянными фазами 0 , $2\pi/3$ и $4\pi/3$. Правильный треугольник можно вписать в окружность радиуса R . Тогда три вершины треугольника будут иметь полярные координаты $(R, -\pi/3)$, $(R, \pi/3)$ и (R, π) . При $P=3$ для СФП с номером $n=1$ из формулы (1) можно получить:

$$E_1(\rho, \theta) = \left(\frac{i\sqrt{3}}{8\pi} \right) \left[\frac{f \exp(i\theta)}{k\rho^2} \right] \left\{ \frac{3 \exp\left[-\frac{ikR\rho}{f} \cos(\pi + \theta)\right]}{\cos(\pi + \theta) \cos(\pi/3 - \theta) \cos(\pi/3 + \theta)} + \frac{\exp\left[-\frac{ikR\rho}{f} \cos(\pi + \theta)\right]}{\cos(\pi + \theta) \sin(\theta - \pi/3) \sin(\pi/3 + \theta)} + \frac{\exp\left[-\frac{ikR\rho}{f} \cos(\pi/3 - \theta)\right]}{\cos(\pi/3 - \theta) \sin(\pi + \theta) \sin(\pi/3 + \theta)} + \frac{\exp\left[-\frac{ikR\rho}{f} \cos(\pi/3 + \theta)\right]}{\cos(\pi/3 + \theta) \sin(\pi + \theta) \sin(\theta - \pi/3)} \right\}, \quad (2)$$

где (ρ, θ) - полярные координаты Фурье-плоскости, k - волновое число света, f - фокусное расстояние сферической Фурье-линзы. Из уравнения (2) следует, что при $\rho \rightarrow 0$ вблизи оптической оси сформируется ОВ:

$$E_1(\rho \rightarrow 0, \theta) \approx \left(\frac{-3\sqrt{3}k^2 R^3}{48\pi f^2} \right) \rho \exp(i\theta). \quad (3)$$

Выражение (3) можно также получить из уравнения (3) в [14], положив $P=3$ и $n=1$.

На рис. 2б показана рассчитанная интенсивность $I_1(\rho, \theta) = |E_1(\rho, \theta)|^2$ в плоскости Фурье-

спектра при дифракции плоской волны на СФП, показанной на рис. 2а. На рис. 2в показана соответствующая фаза светового поля в Фурье-плоскости. Параметры расчета: длина волны $\lambda = 633$ нм, $R = 2$ мм, $f = 150$ мм, число отсчетов 512×512 . Из рис. 2б, 2в видно, что в центре картины дифракции (на оптической оси) имеется изолированный ноль интенсивности, фаза вблизи которого носит спиральный характер. Также видно, что ОВ имеет площадь, примерно равную диску Эйри с диаметром $1,22\lambda f/R$ (пунктирная окружность на рис. 2в).

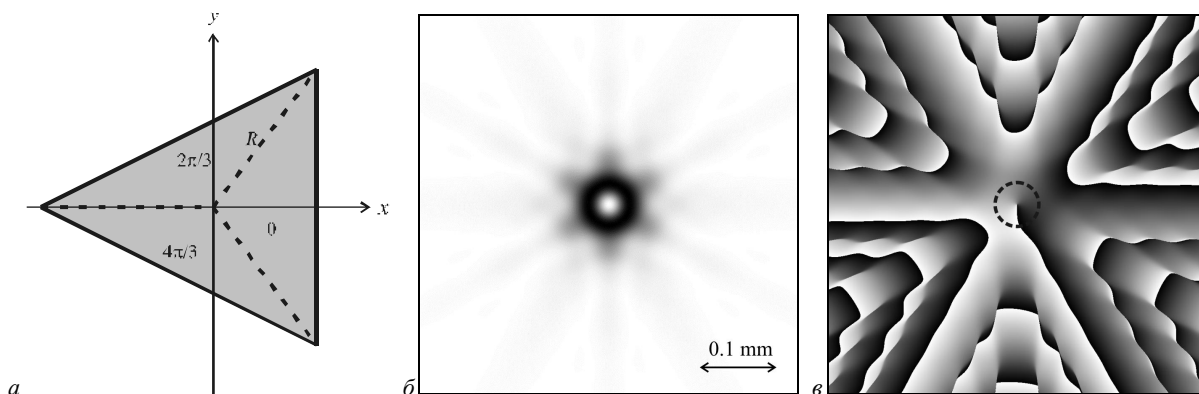


Рис. 2 Дифракция Фраунгофера плоской волны на трехуровневой СФП с треугольной апертурой, разделенной на треугольные субапертуры: фаза ДОЭ (а), интенсивность (б) и фаза (в) света в Фурье-плоскости (пунктиром показан диск Эйри)

2.2 Квадратная СФП с четырьмя уровнями фазы

На рис. 3а показана СФП ($n=1$), ограниченная квадратной апертурой, площадь которой разделена на четыре квадратных равные субапертуры с фазами $0, \pi/2, \pi$ и $3\pi/2$. Комплексная амплитуда света в плоскости Фурье-спектра при дифракции плоской волны на СФП (рис. 3а) имеет вид:

$$E_2(\xi, \eta) = \left(\frac{-ka^2}{\pi f} \right) \text{sinc} \left(\frac{ka\xi}{2f} \right) \text{sinc} \left(\frac{k\eta}{2f} \right) \times \left\{ \sin \left[\frac{ka}{2f} (\xi + \eta) \right] - i \sin \left[\frac{ka}{2f} (\xi - \eta) \right] \right\}, \quad (4)$$

где $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$, (ξ, η) - декартовы координаты в Фурье-плоскости, $2a$ - сторона квадратной апертуры: $R = a\sqrt{2}$, R - радиус окружности, в которую вписан квадрат. При $\xi \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow 0$ вблизи оптической оси сформируется ОВ и комплексная амплитуда будет пропорциональна выражению:

$$E_2(\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0) \approx \left(\frac{-k^2 a^3}{2\pi f^2} \right) (1-i)(\xi + i\eta), \quad (5)$$

или в полярных координатах:

$$E_2(\rho \rightarrow 0, \theta) \approx \left[\frac{-k^2 R^3 (1-i)}{4\sqrt{2}\pi f^2} \right] \rho \exp(i\theta), \quad (6)$$

где $\xi = \rho \cos \theta, \eta = \rho \sin \theta$.

Кроме изолированного нуля интенсивности в центре картины дифракции имеется множество изолированных нулей, вблизи которых фаза имеет сингулярный (винтовой) характер.

Например, при $\xi = \pm\eta$ в точках $\xi_n = \lambda fn / (2a)$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. На рис. 3б показана интенсивность картины дифракции Фраунгофера плоской волны на СФП (рис. 3а), а на рис. 3в - фаза картины дифракции. Параметры расчета те же, что и для рис. 2. Несмотря на то, что картина дифракции не обладает круговой симметрией, вблизи ее центра имеется малая область (примерно равная диску Эйри), в которой интенсивность близка к кольцу, а фаза линейно зависит от полярного угла.

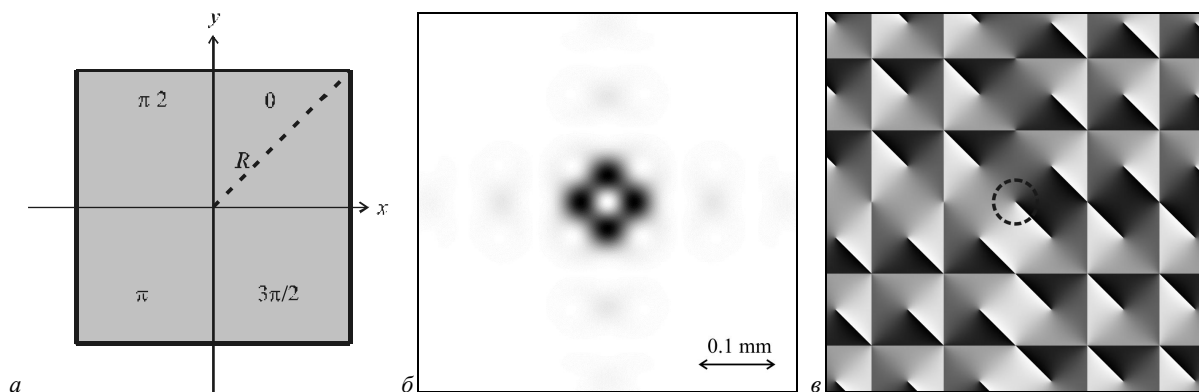


Рис. 3 Дифракция Фраунгофера плоской волны на четырехуровневой СФП с квадратной апертурой, разделенной на квадратные субапертуры: фаза ДОЭ (а), интенсивность (б) и фаза (в) света в Фурье-плоскости (пунктиром показан диск Эйри)

На рис. 4а показан другой возможный вариант разделения квадратной апертуры четырехуровневой СФП ($n=1$) на четыре одинаковых треугольника с

фазами $0, \pi/2, \pi$ и $3\pi/2$. Комплексная амплитуда света в плоскости Фурье-спектра при дифракции плоской волны на СФП (рис. 4а) имеет вид:

$$E_{20}(\xi, \eta) = \left(-\frac{2a}{\pi}\right) \left(\frac{\xi + i\eta}{\xi^2 - \eta^2}\right) \times \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{ka\xi}{f}\right) \cos\left(\frac{ka\eta}{f}\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{ka\eta}{f}\right) \cos\left(\frac{ka\xi}{f}\right) \right], \quad (7)$$

где $R = a\sqrt{2}$. Вблизи оптической оси ($\xi \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$) сформируется ОВ и комплексная амплитуда (7) будет пропорциональна выражению:

$$E_{20}(\rho \rightarrow 0, \theta) \approx \left(-\frac{k^2 R^3}{4\sqrt{2}\pi f^2}\right) \rho \exp(i\theta). \quad (8)$$

На рис. 4 показаны рассчитанные интенсивность (б) и фаза (в) картины дифракции Фраунгофера от четырехуровневой СФП (рис. 4а). Видно, что в центре картины дифракции в области, примерно равной диску Эйри с диаметром $1.22\lambda f/R$ имеет место ОВ с топологическим зарядом 1.

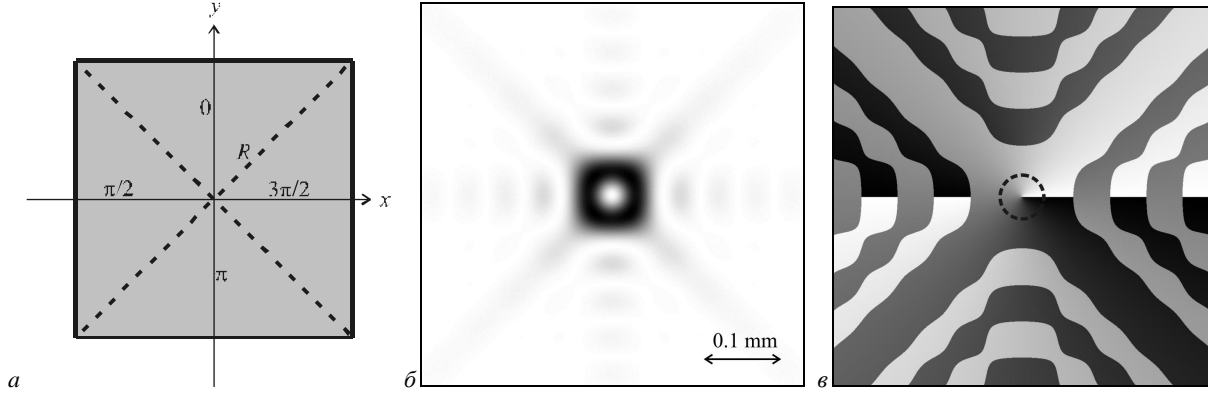


Рис. 4 Дифракция Фраунгофера плоской волны на четырехуровневой СФП с квадратной апертурой, разделенной на треугольные субапертуры: фаза ДОЭ (а), интенсивность (б) и фаза (в) света в Фурье-плоскости (пунктиром показан диск Эйри)

2.3 Составная СФП из трех- и четырехуровневых СФП

Так как рассмотренные ранее малоуровневые СФП имеют апертуру в виде правильного треугольника и квадрата, то с помощью них можно формировать сложные (составные) СФП, присоединяя одну ячейку к другой как в домино. Известно, что с помощью правильных 3-х, 4-х и 6-тиугольников можно без пропусков и наложений заполнить всю плоскость.

В качестве примера на рис. 5 показаны: составная СФП (а), которая получается при объединении четырех квадратных СФП (рис. 4а), повернутых одна относительно другой на $\pi/2$ по часовой стрелке; интенсивность (б) и фаза (в) картины дифракции Фраунгофера плоской волны на трехуровневой СФП (рис. 5а). Параметры расчета те же, что и на рис. 2 и 3. Из рис. 5 видно, что в центре картины дифракции сформировался ОВ с топологическим зарядом $n = 2$.

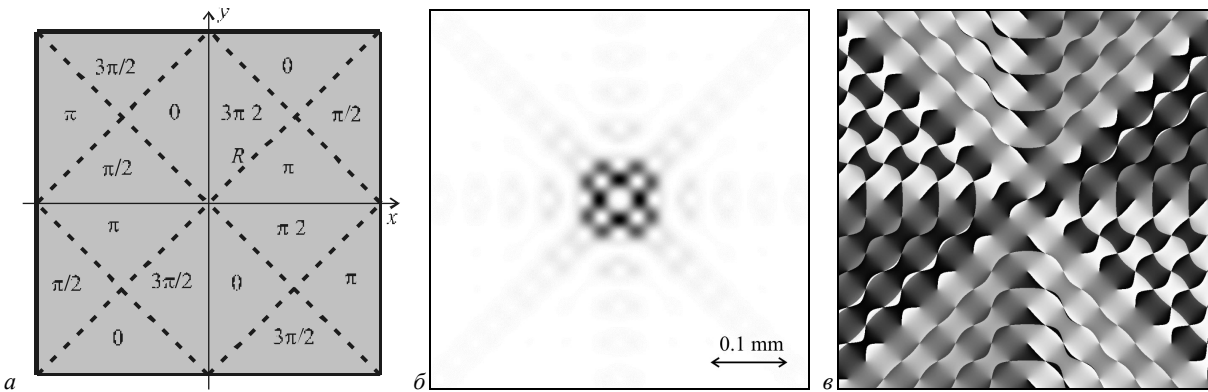


Рис. 5 Четырехуровневая составная СФП (а), состоящая из четырех повернутых относительно друг друга на $\pi/2$ СФП (рис. 4а); интенсивность (б) и фаза (в) Фурье-спектра

На рис. 6а показана трехуровневая составная СФП, полученная путем объединения шести одинаковых треугольных трехуровневых СФП (рис. 2а) с номерами $n = 1$. При таком объединении все СФП оказались повернутыми друг относительно друга на $\pi/3$. На рис. 6б и 6в показаны интенсивность и фаза картины дифракции Фраунгофера при дифракции плоской волны на трехуровневой СФП (рис. 6а). Из рис. 6 видно,

что в центре картины дифракции (на оптической оси) сформировался ОВ с топологическим зарядом $n = 2$. Хотя вблизи составной СФП (рис. 6а) образуется ОВ с топологическим зарядом $n = 4$, в дальней зоне картину дифракции в центре формируют периферийные участки СФП, а как видно из рис. 6а совокупность треугольников, прилежащих к границе апертуры СФП, обладает топологическим зарядом $n = 2$.

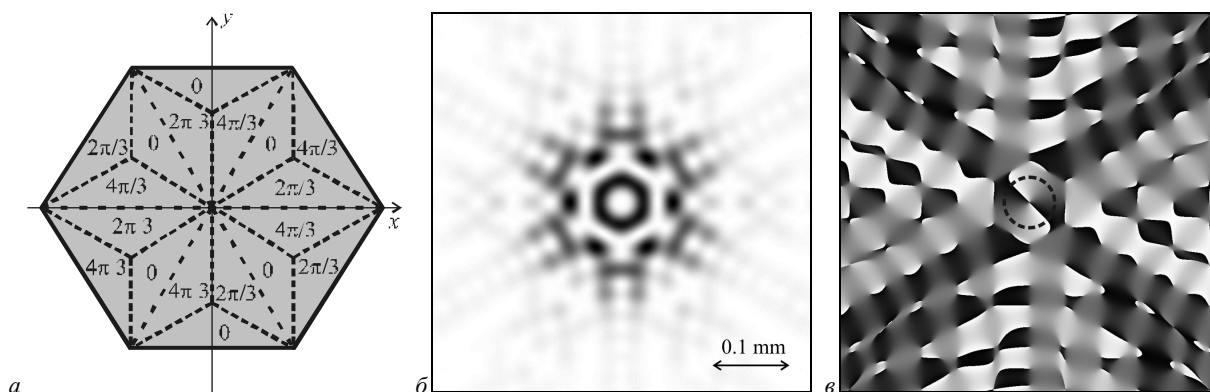


Рис. 6 Трехуровневая составная СФП (а), состоящая из шести треугольных СФП (рис. 2а); интенсивность (б) и фаза (в) в плоскости Фурье-спектра, при дифракции плоской волны на составной трехуровневой СФП (а) (пунктиром показано светлое кольцо картины дифракции)

На рис. 7а показана такая же составная СФП, но с исключенными внешними областями.

На картине дифракции (рис. 7б) кольцо получается с разрывами, однако при обходе вдоль него фаза меняется на 8π (рис. 7в, область кольца показана пунктирной линией), что соответствует топологическому заряду $n = 4$ (хотя в центральной части фаза соответствует СФП с $n = 2$).

3. Трехуровневая СФП, состоящая из трех субапертур

ОВ вблизи оптической оси можно сформировать с помощью СФП, состоящей из трех субапертур с постоянными фазами 0 , $2\pi/3$ и $4\pi/3$. На рис. 8а показана трехуровневая СФП ($n = 1$), апертура которой состоит из трех круглых субапертур радиуса R_0 .

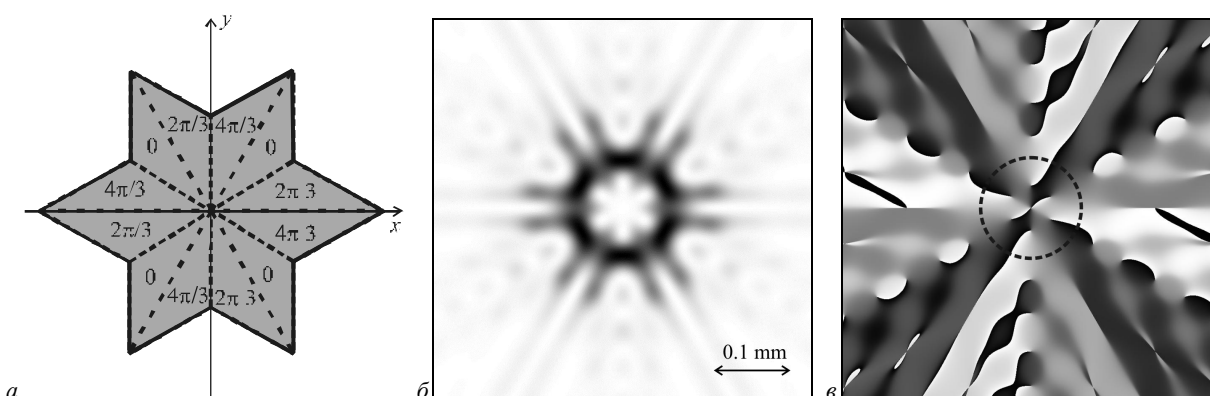


Рис. 7 Трехуровневая составная СФП (а), состоящая из шести треугольных СФП, как на рис. 6а, но с исключенными внешними областями; интенсивность (б) и фаза (в) в плоскости Фурье-спектра (пунктиром показано светлое кольцо картины дифракции, при обходе которого фаза меняется на 8π)

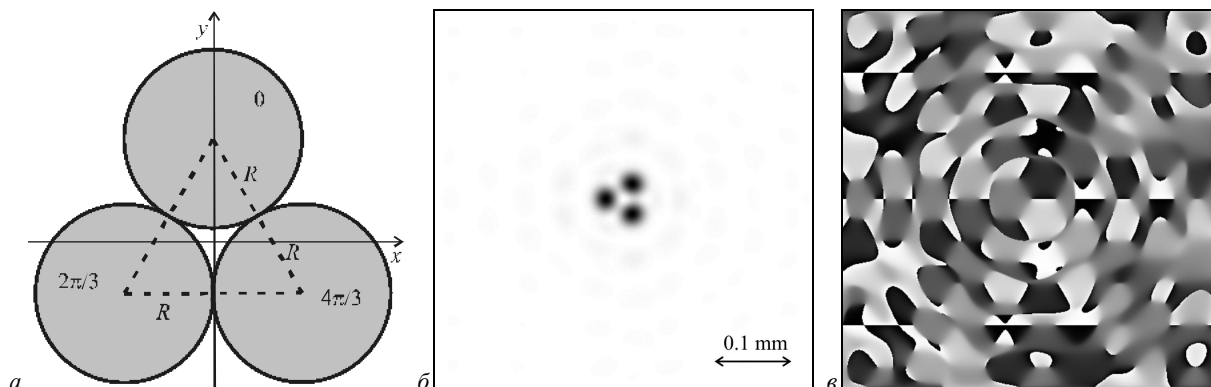


Рис. 8 Трехуровневая трехсубапертурная СФП (а); интенсивность (б) и фаза (в) в плоскости Фурье-спектра

Центры трех кругов являются вершинами правильного треугольника со стороной $2R_0$.

Комплексная амплитуда света в плоскости Фурье-спектра, которая описывает дифракцию плоской волны на СФП (рис. 8а), имеет вид:

$$E_3(\rho, \theta) = 2\pi \left(\frac{R_0}{\rho} \right) J_1 \left(\frac{kR_0\rho}{f} \right) \times \left\{ \exp \left(\frac{ikR\rho}{f} \cos \theta \right) + \exp \left[\frac{i2\pi}{3} - \frac{ikR\rho}{f} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right] + \exp \left[\frac{i4\pi}{3} + \frac{ikR\rho}{f} \cos \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right) \right] \right\}, \quad (9)$$

где $R = 2R_0/\sqrt{3}$ - радиус окружности, в которую вписан треугольник, образованный центрами трех окружностей (рис. 8а).

Вблизи центра картины дифракции ($\rho \rightarrow 0$) комплексная амплитуда (9) будет пропорциональна выражению, описывающему ОВ с топологическим зарядом $n = 1$:

$$E_3(\rho \rightarrow 0, \theta) \approx \left(\frac{i3\pi}{8} \right) \left(\frac{k^2 R^3}{f^2} \right) \rho \exp(i\theta). \quad (10)$$

На рис. 8б и 8в показаны рассчитанные интенсивность и фаза в плоскости Фурье-спектра, которые формируются при дифракции плоской волны на СФП (рис. 8а). Из рис. 8 видно, что вблизи оптической оси в круге диаметром, близким к диаметру диска Эйри, формируется ОВ с $n = 1$.

4. Заключение

Рассмотрены трех- и четырехуровневые СФП с апертурами в форме треугольника или квадрата, а также трехуровневая СФП, состоящая из трех круглых субапертур. Для описания дифракции Фраунгофера плоских волн на таких простых ДОО получены аналитические выражения. Численно показано, что вблизи оптической оси или в центре картины дифракции Фраунгофера в области, примерно равной диску Эйри, формируется оптический вихрь с топологическим зарядом 1. Также численно показано, что составные СФП, набранные из 6 или 4 таких трех- и четырехуровневых СФП, могут формировать оптические вихри с топологическим зарядом 2 и 4.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российско-Американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-Sa-06), и грантов РФФИ 08-07-99007 и 07-07-97600.

Литература

1. **Y.J. He**, Fusion of necklace-ring patterns into vortex and fundamental solitons in dissipative media, // Y.J. He, H.Z. Wang, B.A. Malomed -Opt. Express 15, No.26, 17502-17508 (2007).
2. **S. Lopez-Aguayo**, Elliptically modulated self-trapped singular beams in nonlocal nonlinear media: ellipticons, // S. Lopez-Aguayo, J.C. Gutiérrez-Vega, -Opt. Express 15, No.26, 18326-18338 (2007).
3. **A.A. Ishaaya**, Self-focusing dynamics of polarization vortices in Kerr media, // A.A. Ishaaya, L.T. Vuong, T.D. Grow, A.L. Gaeta, - Opt. Lett. 33, No.1, 13-15 (2008).
4. **Bahabad**, Generation of Optical Vortex Beams by Non-linear Wave Mixing // Bahabad, A. Arie, -Opt. Express 15, No.26, 17619-17624 (2007).
5. **J. Strohaber** Ultrashort intense-field optical vortices produced with laser-etched mirrors, // J. Strohaber, T.D. Scarborough, G.J. Uiterwaal, -Appl. Opt. 46, No.36, 8583-8590 (2007).
6. **V.G. Denisenko**, Mapping phases of singular scalar light fields // V.G. Denisenko, A. Minovich, A.S. Desyatnikov, W. Krolikowski, M.S. Soskin, Y.S. Kivshar, -Opt. Lett. 33, No.1, 89-91 (2008).
7. **M. Kolář**, Path and phase determination for an interfering photon with orbital angular momentum // M. Kolář, T. Opatrný, G. Kurizki -Opt. Lett. 33, No.1, 67-69 (2008).
8. **J.C. Gutiérrez-Vega**, "Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes," // -Opt. Express 15, No.10, 6300-6313 (2007).
9. **V.V. Kotlyar**, Family of hypergeometric laser beams, J. // V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, -Opt. Soc. Am. A 25, No.1, 262-270 (2008).
10. **G. Gbur**, Vortex beam propagation through atmospheric turbulence and topological charge conservation // G. Gbur, R.K. Tyson -J. Opt. Soc. Am. A 25, No.1, 225-230 (2008).
11. **M. Aubailly**, Imaging with an array of adaptive subapertures // M. Aubailly, M.A. Vorontsov, - Opt. Lett. 33, No.1, 10-12 (2008).
12. **Y. Izdebskaya**, Symmetric array of off-axis singular beams: spiral beams and their critical points // Y. Izdebskaya, V. Shvedov, A. Volyar, - J. Opt. Soc. Am. A 25, No.1, 171-181 (2008).
13. **А.А. Ковалев**, Дифракция Фраунгофера на многоуровневой (квантованной) спиральной фазовой пластинке // А.А. Ковалев, В.В. Котляр, -Компьютерная оптика, Т.31, №3, С.9-13 (2007).
14. **V.V. Kotlyar**, Fraunhofer diffraction of the plane wave by the multilevel (quantized) spiral phase plate // V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, - Opt. Lett. 33, No.2, 189-191 (2008).

THREE- AND FOUR-LEVEL SPIRAL PHASE PLATES

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of the RAS,

²Samara State Aerospace University

Abstract

We analytically and numerically demonstrate that an optical vortex with topological charge 1 is formed near an optical axis or at the center of the Fraunhofer diffraction pattern, in domain approximately equaled to the Airy disk, during plane-wave diffraction at three- and four-level spiral phase plates (SPP), with triangle and square apertures. Composite SPPs assembled from six or four of these three- and four-level SPPs may build up optical vortices with topological charges 2 and 4.

Keywords: multilevel (quantized) spiral phase plate, optical vortex, topological charge, triangle aperture.

Acknowledgements: The work was financially supported within the framework of the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (grant CRDF RUX0-014-Sa-06) and by the Russian Foundation for Basic Research (grants No. 08-07-99007 and No. 07-07-97600).

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA. Three- and four-level spiral phase plates [In Russian]. *Computer Optics* 2008; 32(1): 9-14.

Reference

- [1] He YJ, Wang HZ, Malomed BA. Fusion of necklace-ring patterns into vortex and fundamental solitons in dissipative media. *Opt. Express* 2007; 15(26): 17502-17508.
- [2] Lopez-Aguayo S, Gutiérrez-Vega JC. Elliptically modulated self-trapped singular beams in nonlocal nonlinear media: ellipticons. *Opt. Express* 2007; 15(26): 18326-18338.
- [3] Ishaaya AA, Vuong LT, Grow TD, Gaeta AL. Self-focusing dynamics of polarization vortices in Kerr media. *Opt. Lett.* 2008; 33(1): 13-15.
- [4] Bahabad A, Arie. Generation of Optical Vortex Beams by Nonlinear Wave Mixing. *Opt. Express* 2007; 15(26): 17619-17624.
- [5] Strohhaber J, Scarborough TD, Uiterwaal GJ. Ultrashort intense-field optical vortices produced with laser-etched mirrors. *Appl. Opt.* 2007; 46(36): 8583-8590.
- [6] Denisenko VG, Minovich A, Desyatnikov AS, Krolikowski W, Soskin MS, Kivshar YS. Mapping phases of singular scalar light field. *Opt. Lett.* 2008; 33(1): 89-91.
- [7] Kolář M, Opatrný T, Kurizki G. Path and phase determination for an interfering photon with orbital angular momentum. *Opt. Lett.* 2008; 33(1): 67-69.
- [8] Gutiérrez-Vega JC. Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre–Gaussian modes. *Opt. Express* 2007; 15(10): 6300-6313.
- [9] Kotlyar VV, Kovalev AA. Family of hypergeometric laser beams. *Opt. Soc. Am. A* 2008; 25(1): 262-270.
- [10] Gbur G, Tyson RK. Vortex beam propagation through atmospheric turbulence and topological charge conservation. *J. Opt. Soc. Am. A* 2008; 25(1): 225-230.
- [11] Aubailly M, Vorontsov MA. Imaging with an array of adaptive subapertures. *Opt. Lett.* 2008; 33(1): 10-12.
- [12] Izdebskaya Y, Shvedov V, Volyar A. Symmetric array of off-axis singular beams: spiral beams and their critical points. *J. Opt. Soc. Am. A* 2008; 25(1): 171-181.
- [13] Kovalev AA, Kotlyar VV. Fraunhofer diffraction on the multilevel (quantized) spiral phase plate [In Russian]. *Computer Optics* 2007; 31(3): 9-13.
- [14] Kotlyar VV, Kovalev AA. Fraunhofer diffraction of the plane wave by the multilevel (quantized) spiral phase plate. *Opt. Lett.* 2008; 33(2): 189-191.